AZ OPTIMÁLIS MÉRETEZÉS MŰSZAKI ALKALMAZÁSAI

Timár Imre

egyetemi tanár, Pannon Egyetem, Gépészmérnöki Intézet, H-8200 Veszprém, Egyetem u. 10., H-8201 Veszprém, Pf.: 158.,

tel.: 00-36-88-62-45-25, fax: 00-36-88-62-41-20, e-mail: timari@almos.vein.hu,

Honlap: www.uni-pannon.hu

1. Bevezetés

Az anyag-, energia-, gyártási-, üzemeltetési és karbantartási költségek folyamatos növekedése szükségessé, a numerikus módszerek fejlődése pedig lehetővé tette az optimális méretezés módszereinek széleskörű elterjedését a mérnöki feladatok megoldása terén. E módszerek segítségével elérhető, hogy a különböző konstrukciók, rendszerek, stb. ne csak kielégítsék a velük szemben támasztott követelményeket, hanem legyenek gazdaságosak. Az optimális méretezés elterjedésének kezdeti szakaszában a szerkezet tömegét igyekeztek csökkenteni, majd később a problémát a költségek irányából közelítették meg. Ennek megfelelően a méretezés során igyekeztek minél több költségösszetevőt (anyag-, gyártási-, szerelési- és egyéb költségeket) figyelembe venni.

Az optimális méretezési módszerek eredményes műszaki alkalmazásához ismerni kell a matematikai módszereket és tisztában kell lenni a megoldandó feladatok műszaki tartalmával. Az optimálás műszaki alkalmazása céljából röviden összefoglaljuk a számunkra fontos matematikai alapokat.

2. Az optimális méretezés matematikai alapjai

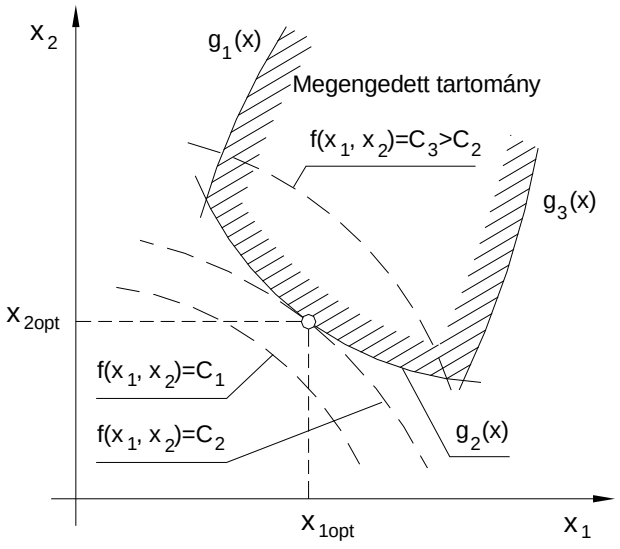
Bármely optimálási feladat megoldásakor egy függvény (a célfüggvény) szélsőértékét (maximumát vagy minimumát) kell meghatározni valamilyen matematikai módszer segítségével. Az optimálás érdekében először meg kell választani azokat a paramétereket, geometriai méreteket, nyomást, hőmérsékletet, stb., amelyeket ismeretlennek tekintünk. Ezen paraméterek alkotják a változók halmazát és összességüket a következőképpen jelöljük: $\underline{x}=[x_1, x_2,\ldots,x_n]^T$, ahol n az ismeretlenek száma.

Ezt követően meg kell fogalmazni az $f(\underline{x})$ célfüggvényt, ami lehet a szerkezet tömege, térfogata, költsége, beleértve az anyag-, a gyártási-, az üzemeltetési- és egyéb költségeket. A célfüggvényhez kapcsolódóan meg kell fogalmazni azokat a feltételeket, melyeket az adott szerkezetnek ki kell elégíteni. A korlátozási feltételek lehetnek egyenlőtlenségek $g_j(\underline{x})$. ill. egyenlőségek $h_j(\underline{x})$. A korlátozások vonatkozhatnak a maximális feszültségekre, alakváltozásokra, geometriai méretekre, stb. A gyártástechnológiából szintén adódhatnak korlátozások, amelyeket szintén ki kell elégíteni. Például szerszámgépeknél, rezgésre hajlamos szerkezeteknél fontos, hogy ne jöjjenek létre káros rezgések, emiatt rezgéscsillapítás korlátozást szokás előírni. Különböző rendszereknél, folyamatoknál szükség van a megengedett hőmérséklet, nyomás, hőveszteség korlátozására, ami szintén feltételt eredményez.

A fentiekben vázolt feladat matematikailag úgy fogalmazható meg, hogy meg kell keresni a többváltozós függvény minimumát úgy, hogy a kapott megoldás elégítse ki a megfogalmazott korlátozási feltételeket

$$\begin{aligned} &\min f(\underline{x}), \\ &0 \le g_j(\underline{x}), \qquad j=1,2,\ldots,m; \\ &0 = h_j(\underline{x}), \qquad j=m+1,\ldots,p. \end{aligned} \tag{1}$$

A fentebbi függvények lehetnek lineárisak, nemlineárisak, ill. speciális típusúak. Előfordul, hogy hiányoznak az egyenlőségi ill. egyenlőtlenségi korlátozások vagy mindkettő. A változók száma tetszőleges lehet. Ennek megfelelően különböző optimálási feladatokkal állunk szemben, melyek megoldása sokszor nehézségekbe ütközik. A matematikai optimálási módszerek lényegében a fentebb megfogalmazott feladat megoldásához kapcsolódnak.



1. ábra: Kétváltozós optimálási feladat

Az (1)-es probléma megoldása két változó (két ismeretlen) és három egyenlőtlenségi korlátozás esetén nagyon szemléletesen ábrázolható (*1. ábra*). A két ismeretlen $(x_1; x_2)$ koordinátarendszerében ábrázolni lehet *a* $g_1(\underline{x})$, $g_2(\underline{x})$, $g_3(\underline{x})$ egyenlőtlenségi korlátozási feltételeket. A korlátozási feltételek meghatározzák a megengedett tartományt, melynek minden pontja kielégíti a feltételeket. A megengedett tartomány pontjai közül meg kell keresni azt (azokat), melyek egyúttal a célfüggvény minimumát adják. Ha a célfüggvénynek különböző C_1, C_2, C_3 értékeket adunk, akkor azt tapasztaljuk, hogy önmagával párhuzamosan tolódik el. Ahol a célfüggvény érinti a megengedett tartományt, ott leolvashatjuk az optimális értékeket (x_{1min}, x_{2min}). Ezen értékeket a célfüggvénybe helyettesítve megkapjuk annak minimumát.

3. A műszaki költségbecslés és a matematikai optimálás összekapcsolása

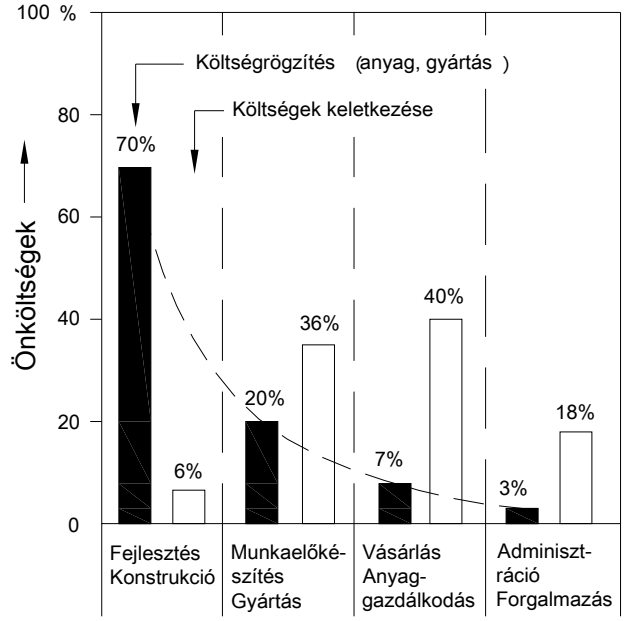
Amennyiben optimáláskor a gyártási költségeket is figyelembe vesszük, akkor ezt a konstrukciók „előzetes költségbecslésének" módszereivel tehetjük meg. A konstrukciók költségbecslése vagy más néven a költségek korai felismerésének módszere a nyolcvanas években indult erőteljes fejlődésnek. A kutatók különböző indíttatásból és különböző módon közelítették meg a problémát. A tervezési változatok megítélése szempontjából a költségek korai felismerése kiemelkedő jelentőségű, mivel ily módon a konstruktőr tevékenységével jelentős mértékben befolyásolni tudja a költségek alakulását. A költségek (anyag- és gyártási) számítására különböző módszereket dolgoztak ki, melyek közül a legfontosabbak:

- relatív költségekkel való számítás,
- számítás regressziós egyenletekkel,
- hasonlósági összefüggésekkel való számítás,
- gyártástechnológiai műveletek műveleti elemként való számítása.

A fenti módszerek közül az anyagköltségek, a félkész termékek és a vásárolt termékek számításánál elsősorban a relatív költségekkel való kezelésmód terjedt el, míg a gyártástechnológiai költségek célszerűen műveleti elemként kezelve számíthatók. A relatív költségeknél az árakat ill. a költségeket valamilyen mennyiségre (méret, anyag, stb.) vonatkoztatják. Ennek előnye, hogy az adatok sokkal hosszabb ideig helytállóak, összehasonlítva az abszolút költségekkel. Anyagokra, félkész termékekre és késztermékekre relatív költség katalógusokat dolgoztak ki. A félkész termékek (csövek, négyszög-szelvények, különböző profilok) közelítőleg azonos fajlagos árral rendelkeznek hengerléssel való gyártás esetén. Azonos tömeg esetén viszont lényegesen drágábbak a húzott és a zárt profilok.

A regressziós egyenletekkel való számítás alapos előkészítő munkát és nagy időráfordítást igényel. Ennek érzékeltetéseként az [1]-es irodalomban a kézi formázású szürkeöntvényből készült darabok regressziós egyenlete található. A költségnövekedési törvényszerűségeknek hasonlósági összefüggésekkel való meghatározását elsősorban hasonló vagy közel hasonló gyártmánysorozatok esetén célszerű elvégezni [2]. A gyártástechnológiai műveletek költségbecslése a bér és anyagköltségek figyelembevételével történik [3].

A fentebb ismertetett módszerekkel elvégezhető a gyártástechnológiák költségbecslése (a költségek korai feltárása). Rendszeres elemzésekkel meg lehet állapítani a költségeket befolyásoló tényezőket. Ez azért fontos, mert a konstrukciók költségeinek legnagyobb részét a tervezés folyamán a konstruktőr automatikusan lerögzíti [4]. Ez a lerögzített hányad különböző területeken végzett elemzések alapján eléri a 70%-ot (VDI-Richtlinie 2235). A *2. ábra* szemléletesen mutatja az adott munkafázisban a lerögzített (fekete oszlop) és a keletkezett költségeket (fehér oszlop).



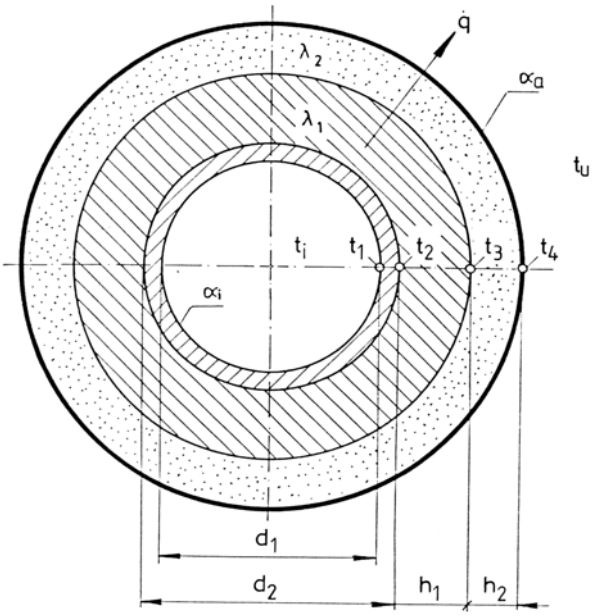
2. ábra: A költségek keletkezése

A tervezési folyamat során a költségek korai felismerése a gazdaságos termékfejlesztés alapja. A termékek költségének csökkentése céljából léteznek olyan általános szabályok, amelyeket a tervezőnek szem előtt kell tartania. E szabályok közül a fontosabbak közé tartozik, hogy a darabszámnak megfelelő gyártástechnológiát kell választani, törekedni kell a szabványos és a kereskedelemben kapható alkatrészek beépítésére, lehetőleg minél kevesebb alkatrészből célszerű a szerkezetet elkészíteni, stb. Saját és irodalmi eredmények felhasználásával számos gyártástechnológia költségbecslésére olyan egyenleteket dolgoztunk ki, melyek az optimális méretezéskor felhasználhatók. Ezek közül ki kell emelni a kézi ívhegesztés, a lemezvágás (lemezollóval ill. lángvágással), a fűrészelés, a habosítás, az alapozás és festés költségszámításának egyenletét [5-6]. Az így kapott egyenleteket a célfüggvénybe lehet beépíteni és ezáltal az optimálási modell egyre jobban közelíti a valóságot. Ily módon lehetőség nyílt az előzetes költségbecslés és a matematikai optimálás összekapcsolására.

A továbbiakban bemutatjuk különböző műszaki problémák optimálási modelljének felépítését, a probléma megoldását és a kapott eredményeket.

4. Csővezetékek optimális szigetelőréteg vastagságának meghatározása

Két egymással érintkező, különböző hőmérsékletű test között hőátadás jön létre. A hőszigetelés célja, hogy a kialakuló hőáramot minél alacsonyabb szinten tartsa. A hőveszteségek csökkentésének egyik hatékony módszere a hőszigetelés. Az egyes anyagok hővezetési tényezője rendkívül eltérő. A gyakorlatban azokat az anyagokat tekintjük hőszigetelőknek, melyek hővezetési tényezője 0,1 W/mK-nél kisebb. Napjainkban a hőszigetelő anyagok között kiemelkedő helyet foglal el a mesterséges szerves anyagok közé tartozó poliuretánhab, mivel a nagy molekulájú poliuretán termékek tulajdonságait kémiailag és fizikailag úgy lehet szabályozni, hogy különböző anyagjellemzőket (sűrűséget, hővezetési tényezőt) lehet elérni. Figyelemre méltó tulajdonsága, hogy tág hőmérséklet-tartományban használható, -196^{o}C-tól +130^{o}C-ig. E tulajdonság azért fontos, mert a hőszigetelési problémákat hideg és meleg szigetelésre lehet felosztani. A gazdaságos hőszigetelés célja alapjában véve a hőveszteség és a szigetelés költségéből álló célfüggvény minimumának meghatározása. A továbbiakban a *3. ábrán* látható, kétrétegű szigeteléssel ellátott csővezeték optimális szigetelőréteg vastagságát határozzuk meg.



3. ábra: Kétrétegű szigeteléssel ellátott cső

A célfüggvény megfogalmazása

Célunk a *3. ábrán* látható, kétrétegű szigeteléssel ellátott csővezeték optimális szigetelőréteg vastagságainak (h_1, h_2) meghatározása oly módon, hogy minimális legyen az

anyagköltség és a hőveszteség költsége [7]. A belső szigetelőréteg nagyobb hőállóságú parafából, míg a külső réteg poliuretánhabból készül. Esetünkben a célfüggvény három részből tevődik össze: a cső anyagköltségéből K_{cs}, a szigetelés anyagköltségéből K_{sz} és a hőveszteség költségéből $K_{hő}$

$$K=K_{cs}+K_{sz}+K_{hő}..$$

A korlátozási feltételek megfogalmazása

A hőveszteség korlátozása

A tényleges hőveszteséget a hőhordozó közegből a külső környezetbe irányuló hőáram okozza. Esetünkben az alumínium burkolat termikus ellenállását elhanyagoljuk, mert értéke nagyon kicsi. Ily módon a korlátozási feltétel

$$q \leq q_{meg,}$$

ahol q a hőáram, a q_{meg} megengedett hőveszteség.

A szigetelőrétegek érintkezési helyén a hőmérséklet (t_3) korlátozása

A poliuretánhab kiváló hőszigetelő tulajdonsága és viszonylagos olcsósága miatt előnyösen alkalmazható hőszigetelő anyagként. Hátránya, hogy meleg szigetelésként csak 130oC-ig használható. Nagyobb hőmérsékletek esetén e problémát úgy lehet kiküszöbölni, hogy (pl. csővezetékek esetén) kétrétegű szigetelést használunk oly módon, hogy a belső szigetelő réteget nagyobb hőállóságú anyagból (pl. parafából készítjük el). Ennek vastagságát úgy határozzuk meg, hogy a két szigetelő réteg határán a t3 hőmérséklet ne haladja meg a kisebb hőállóságú közegre megengedett értéket (tmeg)

$$t_3 \leq t_{meg}\ .$$

A külső falhőmérséklet (t_4) korlátozása.

Bizonyos esetekben szükség van a cső külső felületi hőmérsékletének korlátozására. Esetünkben csupán azt a feltételt tekintjük érvényesnek, hogy a cső külső felületi hőmérséklete nagyobb a tu környezeti hőmérsékletnél

$$t_u \leq t_4\ .$$

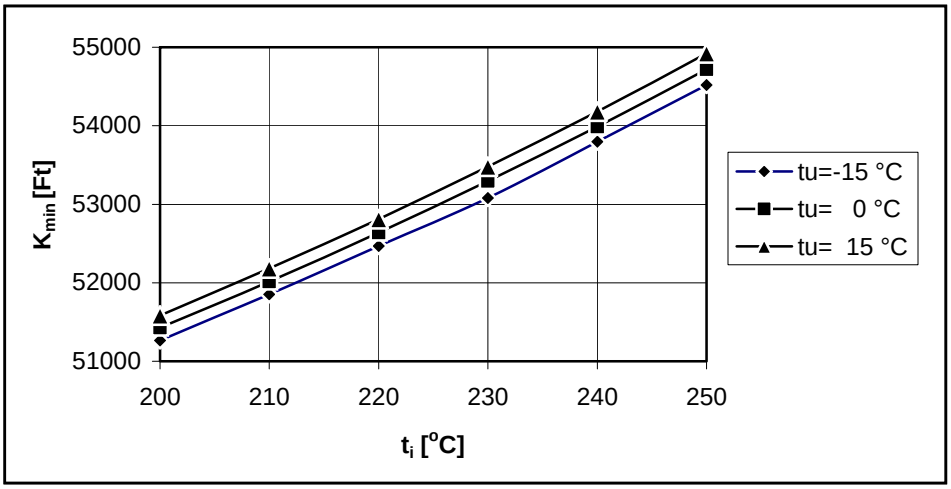
A módszer kis módosítással tetszőleges számú szigetelő rétegnél is használható. A továbbiakban bemutatjuk a módszer gyakorlati alkalmazását.

Az optimálási probléma megoldása, eredmények

Adatok:

A kétrétegű szigeteléssel ellátott csőben pg=5 bar nyomású gőz áramlik 5 m/s sebességgel. A csővezeték a szabadban helyezkedik el és a szélsebesség 10 m/s; d1=0,159 m; d2=0,168 m; qmeg=100 W/m; tu=-15oC; 0 oC; 15 oC; ti=200,…,250 oC; t3=130 oC; αa=48 W/m2K; αi=105,5 W/m2K; $\lambda 1$=0,052 W/mK; $\lambda 2$=0,021 W/mK; λcs=52,3 W/mK.

A megfelelő értékek és összefüggések felhasználásával futtatásokat végeztünk különböző paraméterek esetén.



4. ábra: A költségminimum változása a csőben áramló közeg hőmérsékletének függvényében

A 4. ábrán a költségfüggvény minimumának változása látható a csőben áramló közeg hőmérsékletének függvényében különböző környezeti hőmérsékletek esetén (15 oC; 0 oC; -15 oC). Látható, hogy a költségfüggvény minimuma a csőben áramló közeg hőmérséklet növekedésével párhuzamosan növekszik. Ugyancsak növekedés tapasztalható a környezeti levegő hőmérsékletének csökkenésekor is. A jelenséget a hőveszteség és a szigetelés költségének növekedése okozza.

5. Rácsos szerkezet topológiai optimálása

A rácsos szerkezetek optimális méretezésének egyik csoportját azok a feladatok alkotják, melyeknél a geometriai kialakítás nincs rögzítve és először a topológiai kialakítást kell meghatározni. E kutatási terület az utóbbi években erőteljes fejlődésnek indult. Az evolúciós optimálási algoritmus és a végeselemes módszer összekapcsolásával elsősorban síkbeli szerkezeteket lehet optimálni. A kapott eredményt (az optimális topológiát)

gyakorlati megvalósítás szempontjából elemezni kell, mert nem minden esetben kapunk kivitelezhető és gyártható szerkezetet, jóllehet a problémát helyesen oldottuk meg.

Az evolúciós szerkezetoptimálási algoritmus első lépésben a kiinduló felületet végeselemes hálóval befedi és előállítja az elemeket. Az optimálás a továbbiakban oly módon történik, hogy a kevésbé igénybe vett elemeket eltávolítja és így valójában feszültség szempontjából kihasznált tartót kapunk.

Ezt követően az elemekben keletkező redukált feszültséget σ_{red}^{e}-et összehasonlítja a szerkezetben ébredő maximális redukált feszültséggel (σ_{max}-mal). Minden végeselemes számítás végén eltávolítja azokat az elemeket, amelyekre teljesül az alábbi feltétel:

$$\frac{\sigma_{red}^{e}}{\sigma_{max}} \leq EH_i,$$

ahol EH_i az i-edik ún. eltávolítási hányados. A végeselemes számítás és az elem eltávolítása addig tart, amíg az állandósult állapot nem alakul ki, vagyis már nem lehet több elemet eltávolítani. Ekkor az eltávolítási hányadost meg kell növelni az EH evolúciós hányados értékével:

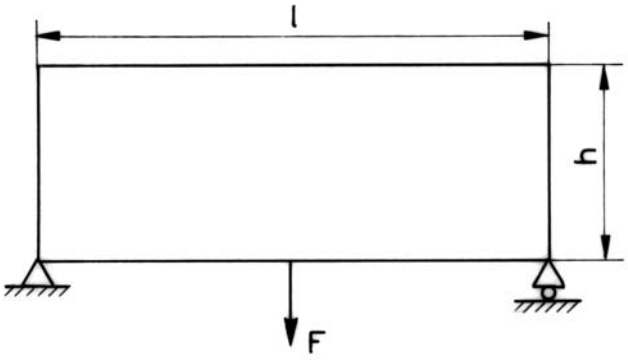
$$EH_{i+1} = EH_i + EH, \quad \text{i=0, 1, 2,..,n.}$$

Ezzel az új eltávolítási hányadossal ismét megtörténik a véges elemes számítás, majd az elemeltávolítás egészen addig tart, amíg ki nem alakul az új egyensúlyi állapot. Az evolúciós folyamat mindaddig folytatódik, amíg az optimumot az eljárás meg nem határozta, pl. a feszültségszint a maximális feszültség 75%-át el nem érte. Természetesen ezt még lehet finomítani, mivel a legjobb eredmény a feszültségre kihasznált ún. egyenszilárdságú szerkezet. Amennyiben ismerjük az adott anyag megengedett feszültségét, akkor optimáláskor ezt az értéket kell megcélozni.

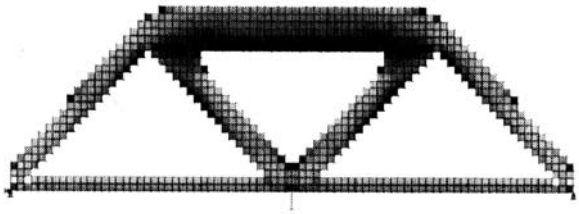
Gyakorlati alkalmazás

Feladatunk, hogy az 5. ábrán látható tartóból kiindulva meghatározzuk az optimális rácsos szerkezetet [8].

A tartó méretei: l=800 mm; h=250 mm; EHmax=15%; ν=4 mm (lemezvastagság); F=400 N.



5. ábra: A tartó kiindulási alakja



6. ábra: Az optimális tartó

Az optimálás elvégzése után a 6. ábrán látható tartót kaptuk. Az 1. táblázat ismerteti a kiinduló derékszögű négyszög alakú modellre és az optimált modellre kapott minimális és maximális redukált feszültségeket, valamint a szerkezet térfogatát EH=15% esetén. Az optimáláskor természetesen nagyobb eltávolítási hányadost is meg lehet adni, de a tapasztalat azt mutatja, hogy a 15%-os érték már jó eredményt ad.

1. táblázat: A tartók maximális és redukált feszültsége, valamint térfogata

	σ_{min} [MPa]	σ_{max} [MPa]	$\sigma_{min}/\sigma_{max}$	Térfogat [mm^3]
Kiinduló modell	0,01	14,42	0,001	$8{,}0.10^5$
Optimált modell	2,16	13,91	0,155	$3{,}0.10^5$

Az optimált rácsos tartót elkészítettük és Hottinger műszerbázison alapuló nyúlásmérő bélyeges mérésekkel ellenőriztük a feszültségek eloszlását. A vizsgált pontokban a mért és számított feszültségek közti maximális eltérés nem haladta meg a 3,75%-ot. Látható, hogy ezzel az algoritmussal elsősorban térfogat- ill. tömegminimumra lehet optimálni. Az evolúciós hányados növelésével az eredmények tovább finomíthatók, illetve ha a kapott rácsos tartót alakra optimálisnak tekintjük, akkor elvégezhető a rácsos tartó további

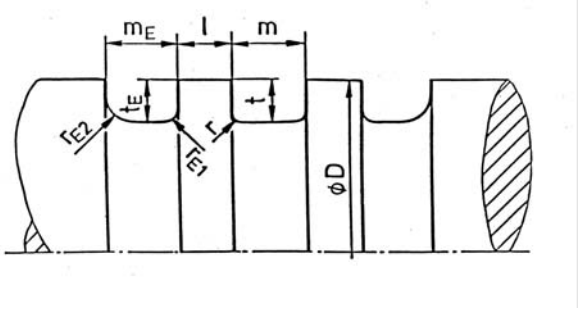
optimálása. Ily módon figyelembe lehet venni különböző gyártási költségeket és a feszültségkorlátozáson kívül más egyéb korlátozásokat is.

6. Biztosító gyűrűk tehermentesítő hornyainak optimálása

Ismeretes, hogy a tengelyeken levő hírtelen keresztmetszet változások feszültségkoncentrációt eredményeznek, ami jelentősen csökkenti a tengelyek élettartamát. Ugyanakkor az is tény, hogy az így kialakult feszültségkoncentrációt beszúrásokkal (tehermentesítő hornyokkal) csökkenteni lehet. Ebben az esetben felvetődik a kérdés, hogy a feszültségkoncentrációt milyen geometriai kialakítású horonnyal lehet leghatékonyabban

csökkenteni, vagyis meg kell határozni a horony optimális geometriai méreteit. E probléma megoldásában a Darmstadti Műszaki Egyetemmel folytatott együttműködésünk keretében vettünk részt [9-10].

A tehermentesítő horony optimális geometriai méreteinek meghatározása céljából a 7. ábrán látható horonyformát választottuk. A horonyalak feszültségoptikai vizsgálatából kitűnt, hogy a legjobb tehermentesítő hatás l/t = 1,2 és mE /t = 2 esetén érhető el, emiatt ezen értékeket állandónak tekintettük A keresztmetszet változás okozta feszültségnövekedés meghatározásához az αk alakténye zőt használja a szakirodalom. A probléma pontosabb leírása érdekében a [9] alapján ennek módosított változatát az un. bruttó alakténye zőt választottuk. Ennek felhasználásával fogalmaztuk meg az optimálási feladatot.



7. ábra: A főhorony és a tehermentesítő hornyok kialakítása

Ismeretlenek:
a tehermentesítő horony geometriai méretei *(r, t_E, r_{E1}, r_{E2})*.

Célfüggvény:
a főhorony bruttó alakténye zője *(α_{kH})* legyen minimális.

Korlátozási feltételek:

a korlátozási feltételek megfogalmazásakor ügyelni kell arra, hogy a bal ill. jobboldali tehermentesítő horony bruttó alakténye zője (αkEb ill. αkEj). ne legyen nagyobb a főhorony

alakténye zőjénél, mert ebben az esetben megszűnik a tehermentesítő hatás. Ennek figyelembevételével az alakténye zőkre vonatkozó korlátozási feltételek:

$$\alpha_{kEb} \leq \alpha_{kH} \text{ és } \alpha_{kEj} \leq \alpha_{kH}.$$

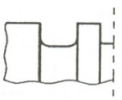
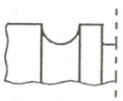
Ezen túlmenően egyes geometriai méretekre alsó és felső korlátozási feltételeket írtunk elő. Egy 40 mm átmérőjű tengely optimális méretezésekor kapott eredményeket a 2. táblázat ismerteti. A kapott eredmények alátámasztása céljából végeselemes módszerrel megvizsgáltuk az optimális kialakítású tehermentesítő hornyot és három másik, de nem optimális geometriájú hornyot.

Az a jelű tehermentesítő horony az optimális geometriai méretek szerint készült és látható hogy a maximális feszültségek a főhoronyban és a tehermentesítő horonyban szinte megegyeznek, ami gyakorlati szempontból kedvező. A b jelű horonynál a tehermentesítő horony sugarai ugyanakkorák, mint az a jelű horony optimálásakor kapott rE1,opt.

A várakozásnak megfelelően a feszültségek a főhoronyban és az rE1 sugárnál valamivel kisebbek, mint az a jelű horonynál, az rE2 sugárnál azonban a maximális feszültség

kb. 22%-al nagyobb.

2. táblázat: A d = 40 mm átmérőjű tengely optimális méretei

Geometriai méretek feszültségek		Horonyalak			
		 a	 b	 c	 d
D	mm	40			
m	mm	0,85			
t	mm	1,25			
r	mm	0,15			
l	mm	1,50			
m	mm	2,50			
t_E	mm	1,45	1,45	1,25	1,45
r_{E1}	mm	0,62	0,62	1,25	1,25
r_{E2}	mm	1,25	0,62	1,25	1,25
$\sigma_{max,F}$	N/mm^2	236	230	312	269
$\sigma_{max,E1}$	N/mm^2	233	220	235	296
$\sigma_{max,E2}$	N/mm^2	237	289	235	296

A c jelű horony megfelel egy félköríves kialakításúnak, ahol rE /t = 1 és mE /t = 2. Emiatt a maximális feszültségek az rE1 és rE2 sugáron azonosak. A kisebb tehermentesítő horonymélység miatt azonban a főhorony igénybevétele 32 %-kal nagyobb, mint az optimált esetben. A tehermentesítő horony mélységének növelése (d változat) jóllehet csökkenti a főhorony igénybevételét, egyidejűleg azonban növeli a tehermentesítő horony igénybevételét. Az előbbiekből látható, hogy a tehermentesítő hatást félkörív alakú horonnyal nem lehet elérni.

7. Összefoglalás

A cikk röviden bemutatja a matematikai optimálás lényegét és a költségtakarékos tervezés szempontjait. Ezt követően néhány megoldott műszaki optimálási probléma kapcsán ismerteti a módszer gyakorlati alkalmazását. Az optimális méretezés a műszaki feladatok széles körében alkalmazható, ha meg tudjuk fogalmazni a célfüggvény és a korlátozási feltételeket.

Irodalom

[1] Pacyna, H., Hillebrand, A., Rutz, A.: *Kostenfrüherkennung für Gußteile.* VDI-Berichte, Nr. 457, 1982. p.: 103-114.

[2] Pahl, G., Rieg, F.: *Kostenwachstumsgesetze für Baureihen.* Carl Hanser Verlag, München, 1984.

[3] Rachor, N.: *Kostengünstig gestalten mit Operationselementen und Kostenstrukturen*. TH Darmstadt, 1986.

[4] Ehrenspiel, K., Kiewert, A., Lindemann, U.: *Kostengünstig entwickeln und Konstruieren*. Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[5] *Konstrukciók előzetes költségbecslése*. MKM 163/94. 1996. (Témavezető: Timár I.)

[6] *Rétegezett szerkezetek költségének becslése*. OTKA: T 016292. 1999. (Témavezető: Timár, I.)

[7] Timár, I.: *Optimierung der Isolierstärke von Rohrleitungen*. Forschung im Ingenieurwesen, 68(2003), p.: 96-100.

[8] Mechanika mérnököknek. (Szerk.: Csizmadia M. Béla, Nándori Ernő). Modellalkotás. (Timár, I.: 7.2.2. *Rácsos tartó optimálási módszerei*), Budapest, 2003.

[9] Bordás, K., Heinrich, J., Timár, I.: *Optimierung von Entlastungskerben an Sicherungsringnuten.* Konstruktion, 37(1985), p.: 60-65.

[10] Timár, I.: *Az optimális méretezés mérnöki alkalmazásai*. GÉP, 56(2005), No.: 6, p.: 19-26.